

## Examen de Mécanique des fluides compressibles – 3h

NOM :

### Partie 1 : Connaissances Générales

Répondre « Vrai » ou « Faux » et justifier/commenter brièvement

Barème : Réponse juste : 0.5 pt ; Justification : 1 pt ; Réponse fausse : 0 pt ;

Total max : 36 pts

Sans documents, sans calculatrices

30 minutes max

**1. Une onde de Mach :**

- a. est également une caractéristique de Riemann.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. est toujours rectiligne.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. a une inclinaison par rapport à l'écoulement qui est fonction du type de gaz pour le même nombre de Mach.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

**2. Dans le cas d'un écoulement isentrope :**

- a. la vorticité peut ne pas être nulle.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. la pression de sortie d'une tuyère convergente peut être inférieure à la pression arrière.

VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. pression, température, et volume spécifique varient dans le même sens. VRAI FAUX  
Justification/Commentaire :

**3. Quand un écoulement subsonique entre dans une tuyère convergente-divergente :**

- a. la vitesse de l'écoulement peut devenir infinie à la sortie pour une aire de sortie de taille infinie. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- b. il est possible d'avoir deux ondes de chocs droites dans la tuyère. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- c. la pression est toujours inférieure à la pression du réservoir même avec une onde de choc dans la tuyère. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- d. le nombre de Mach en sortie peut avoir la même valeur pour deux tuyères distinctes ayant des aires de col et des aires de sortie différentes. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- e. la température totale a toujours été prise comme constante dans ce cours, quelle que soit la situation. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

- f. le débit ne dépend que des conditions de réservoir. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

#### **4. Une onde de choc droite dans un gaz parfait :**

- a. peut avoir des écoulements de part et d'autre du choc allant dans le sens opposé pour un choix approprié du référentiel. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

### **Justification/Commentaire :**

- b. génère des conditions en aval différentes selon le type de gaz (pour le même nombre de Mach en amont). VRAI FAUX

#### **Justification/Commentaire :**

- c. ne change pas l'entropie le long d'une ligne de courant qui la traverse. VRAI FAUX

#### **Justification/Commentaire :**

- d. peut avoir des ondes de Mach de part et d'autre (en amont et en aval). VRAI FAUX

#### **Justification/Commentaire :**

- e. augmente la pression, la température, et la masse volumique de l'écoulement incident. VRAI FAUX

#### **Justification/Commentaire :**

## **5. Une onde de choc oblique :**

- a. n'est rien d'autre qu'une onde de choc droite pour un observateur se déplaçant d'une manière appropriée. VRAI FAUX

#### **Justification/Commentaire :**

- b. peut être une onde de Mach sous certaines conditions. VRAI FAUX

#### **Justification/Commentaire :**

- c. a toujours un angle (par rapport à l'écoulement) compris entre l'angle de l'onde de Mach (au même nombre de Mach) et 90 degrés. VRAI FAUX

Justification/Commentaire :

### **Justification/Commentaire :**

- d. est toujours présente sur un dièdre dans un écoulement supersonique. VRAI FAUX  
Justification/Commentaire :

Justification/Commentaire :

## 6. Un écoulement de Prandtl-Meyer:

- a. diminue toujours la pression. VRAI FAUX

#### Justification/Commentaire :

- b. est isentrope. VRAI FAUX

#### **Justification/Commentaire :**

- c. ne peut se produire qu'en écoulement supersonique. VRAI FAUX

#### **Justification/Commentaire :**

## Examen de Mécanique des fluides compressibles - 3h

---

NOM :

### Partie 2 : Exercices

#### Barême :

**Ex 1: 21 pts ; Ex 2 : 21 pts, Ex 3 : 22 pts**

**Total max : 64 pts.**

**Documents (formulaire, tables) distribués**

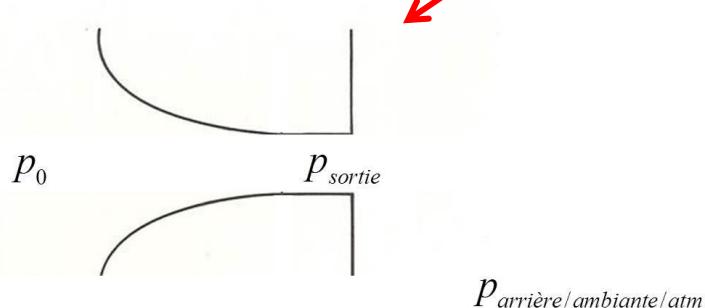
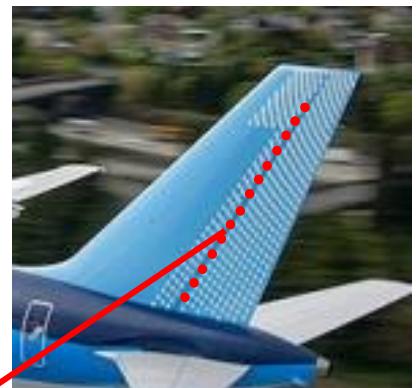
**Jusqu'à 15h15 max**

#### **1. Débit dans une tuyère (21 points)**

Nous travaillons avec Boeing pour le développement de petits injecteurs d'air permettant d'améliorer la qualité de l'écoulement de l'air sur les empennages verticaux des avions (Boeing Eco-Demonstrator).

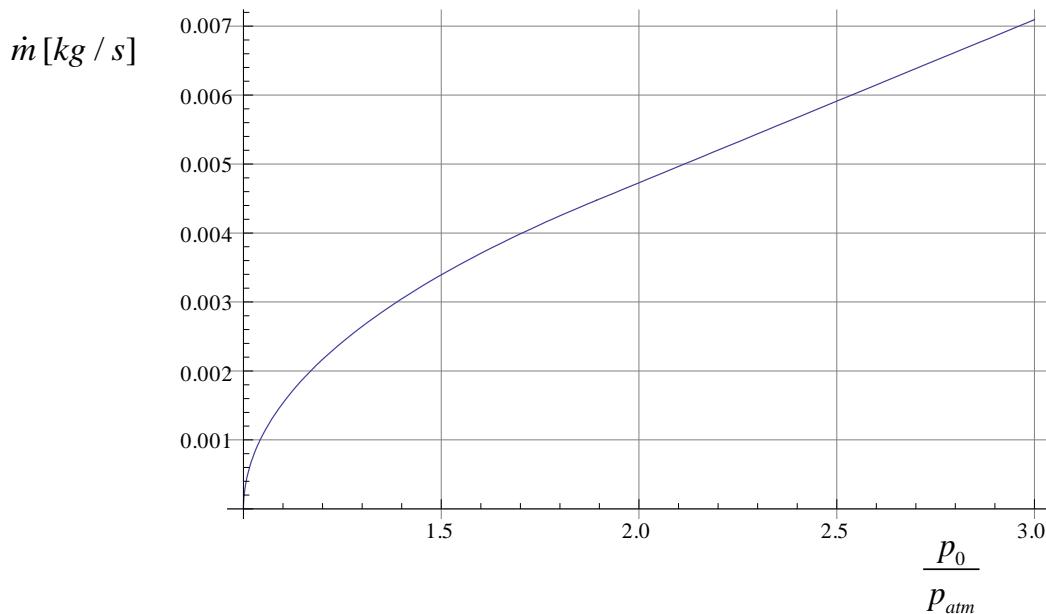


On peut considérer ces injecteurs comme de petites tuyères convergentes. Ces tuyères injectent de l'air dans une atmosphère à des conditions ambiantes correspondant donc aux conditions (pression en particulier) de l'altitude de vol de l'appareil. On prendra la pression ambiante comme étant la pression atmosphérique au niveau du sol  $p_{atm} = 101'325 \text{ Pa}$ . L'aire de sortie de la tuyère de chaque injecteur est égale à  $10^{-5} \text{ m}^2$ .



Pour changer le débit dans la tuyère (et ainsi la vitesse d'éjection de l'air), il faut changer la pression de réservoir  $p_0$  (car la pression arrière, ou ambiante, est fixe). On suppose que le réservoir est isotherme : quand on change sa pression  $p_0$ , la température  $T_0$  est maintenue constante (à  $300 \text{ K}$ ). La constante spécifique de l'air est égale à  $287 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ .

Le diagramme du débit massique  $\dot{m}$  en fonction de la pression de réservoir  $p_0$  normalisée par la pression atmosphérique est donné ci-dessous.



- a. Montrer que pour une sortie subsonique, la courbe ci-dessus est juste :
  - i. en explicitant la formule adéquate permettant de tracer cette courbe,
  - ii. en calculant le débit pour  $p_0 = 1.5 p_{atm}$ ,
  - iii. en calculant les valeurs de pression totale et de débit pour une sortie s'approchant des conditions soniques.
  
- b. Dès que la sortie devient sonique,
  - i. expliquer pourquoi une augmentation de la pression de réservoir ne peut plus changer la valeur du nombre de Mach à la sortie ( $M_{sortie} = 1$ ) ;
  - ii. il est tout de même possible de continuer à augmenter le débit massique en augmentant la pression de réservoir : donner une raison physique de pourquoi cela est possible, alors que, comme vu en cours, une diminution de la pression arrière ne peut plus changer le débit dès que la sortie d'une tuyère convergente devient sonique.
  
- c. Montrer que, dès que la sortie est devenue sonique, la courbe ci-dessus est juste :
  - i. en explicitant la formule adéquate et en montrant ainsi que le débit massique varie linéairement avec la pression totale (pour une température de réservoir constante),
  - ii. en calculant le débit pour  $p_0 = 2.5 p_{atm}$ .
  
- d. Pour une sortie sonique, comment varie la pression de sortie avec  $p_0$  ? Si la pression de sortie est différente de  $p_{atm}$ , que se passe-t-il à l'extérieur de la tuyère pour ramener l'écoulement à la pression atmosphérique ?

## 2. Atténuation d'ondes de chocs (21 points)

Un nouveau programme de transport civil supersonique est en cours depuis mars 2016 avec le programme QUESST (QUIEt SuperSonic Transport). Un objectif majeur est de réduire l'intensité de l'onde choc afin de réduire les nuisances sonores au niveau du sol lors de survols de territoires.

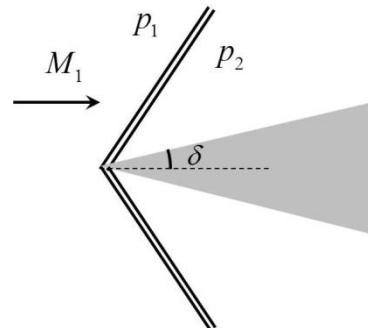


### a. Géométrie du nez

On prend un dièdre bi-dimensionnel comme représentatif du « nez » de l'avion.

- Pour un demi-angle de dièdre  $\delta = 2^\circ$ , évaluer approximativement la différence de pression  $p_2 - p_1$  (en prenant  $p_1 = p_{atm} = 101\,325 \text{ Pa}$ ) pour  $M_1 = 2.0$ .
- Pour de très petits angles  $\delta$  (en radians) on a démontré en cours la relation suivante :

$$\frac{\Pi}{M_1^2} \approx \frac{\delta}{\sqrt{M_1^2 - 1}}$$

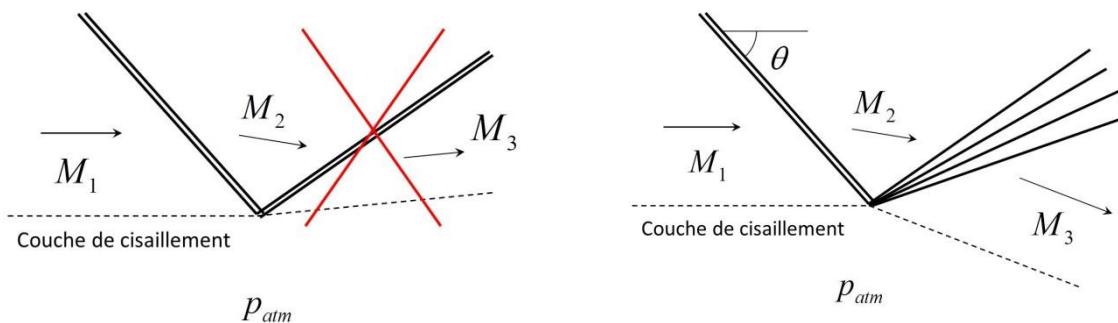


où  $\Pi$  est l'intensité du choc. Trouver l'angle de dièdre nécessaire pour avoir une différence de pression  $p_2 - p_1 = 20 \text{ Pa}$ , et commenter le résultat obtenu.

### b. Absorption d'un choc par une couche de cisaillement

Un choc oblique (généré par un dièdre ou autre) dans un écoulement supersonique à Mach  $M_1 > 1$  interagit avec une couche de cisaillement à pression atmosphérique selon le schéma ci-dessous. Par définition, une couche de cisaillement est telle que la pression statique est la même de part et d'autre de cette couche,  $p_1 = p_{atm}$  et

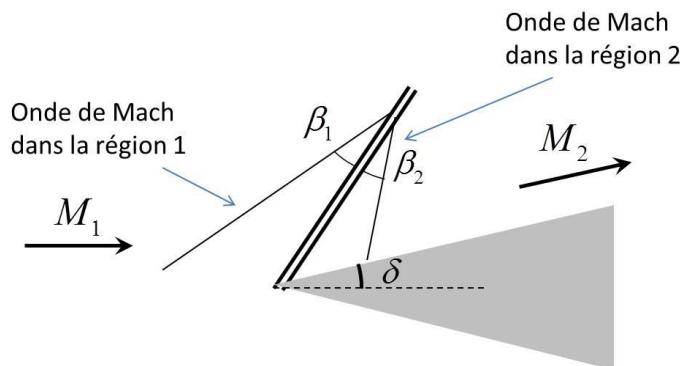
$$p_3 = p_{atm}.$$



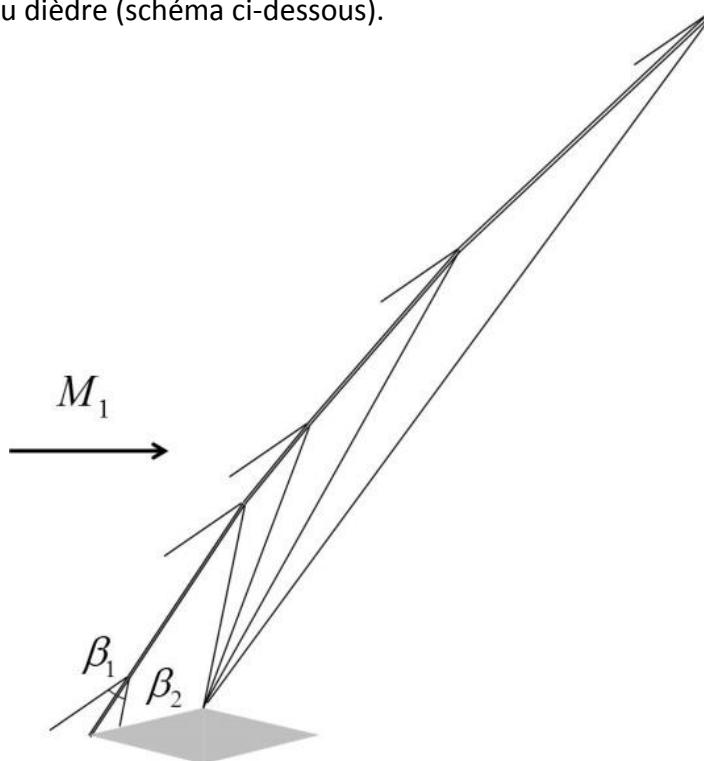
- Montrer qualitativement (en donnant les bons arguments) que la « réflexion » est obligatoirement un éventail de Prandtl Meyer (et non un choc oblique comme dans le cas d'une paroi solide).
- Evaluer le nombre de Mach  $M_3$  ainsi que l'inclinaison de l'écoulement en aval de l'éventail, pour  $M_1 = 2.0$  et un angle d'onde de choc de  $\theta = 40$  degrés.

### c. Atténuation d'une onde de choc par un éventail de Prandtl-Meyer

Une onde de choc oblique (générée par un dièdre) délimite deux régions avec deux nombres de Mach distinct  $M_1$  et  $M_2$ . Les ondes de Mach de part et d'autres de l'onde de choc forment des angles  $\beta_1$  et  $\beta_2$  par rapport à l'onde de choc (voir schéma ci-dessous). Pour un choc d'intensité faible (demi-angle de dièdre  $\delta$  faible), on peut montrer mathématiquement que ces deux angles ont des valeurs très proches,  $\beta_1 \approx \beta_2$ .



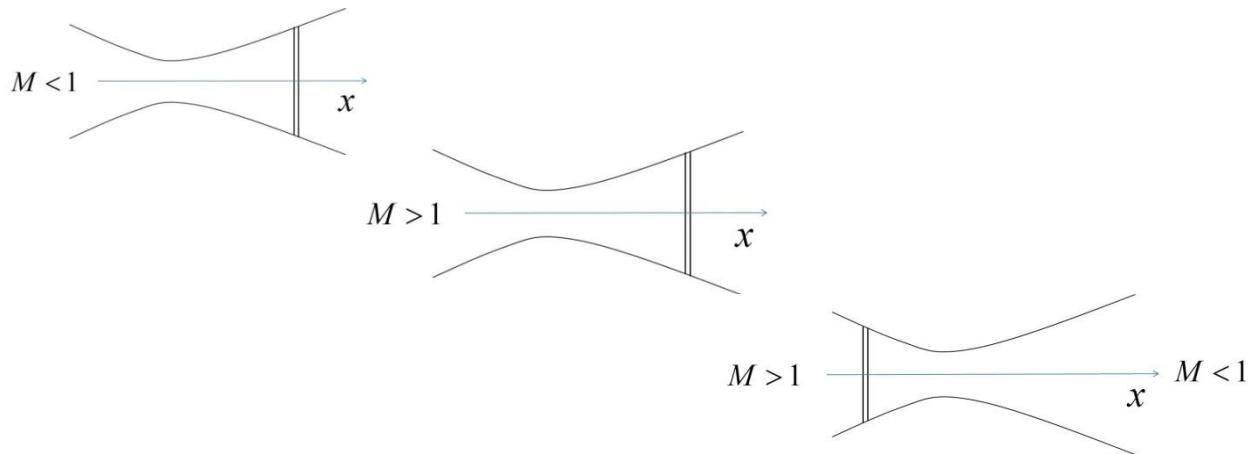
- i. Evaluer  $\beta_1$  et  $\beta_2$  pour  $M_1 = 2.0$  et un demi-angle de dièdre  $\delta = 2^\circ$ , et vérifier ainsi que  $\beta_1$  est assez proche de  $\beta_2$  (ne pas s'inquiéter de la précision des calculs).
- ii. Une onde de choc oblique interagit avec un éventail de Prandtl-Meyer (généré par une arête du dièdre, voir schéma ci-dessous). En vous basant sur le résultat précédent (égalité des angles  $\beta$  des ondes de Mach de part de l'autre du choc), montrer qualitativement que l'angle de l'onde de choc oblique par rapport à l'écoulement incident diminuera progressivement en s'éloignant du dièdre (pour un même nombre de Mach en amont) et montrer qu'ainsi son intensité faiblira très loin du dièdre (schéma ci-dessous).



### 3. Choc dans une tuyère (22 pts)

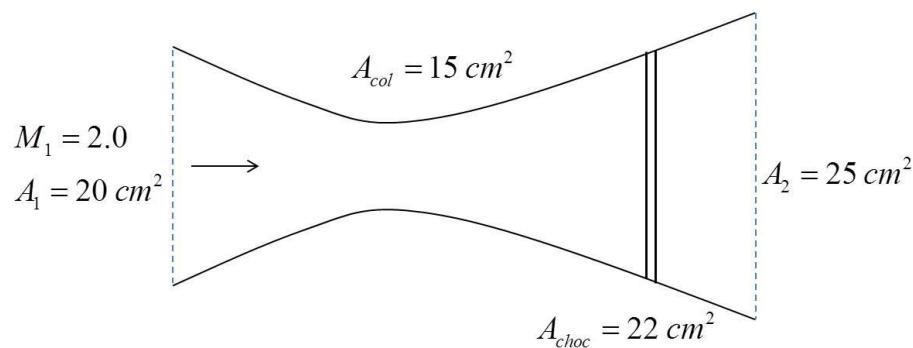
Dans une tuyère convergente-divergente se trouve un choc (comme, par exemple, pour le cas du deuxième col d'une soufflerie supersonique à circuit fermé).

- a. Pour les trois configurations suivantes, tracer qualitativement le profil de pression  $p(x)$  le long de la tuyère (selon  $x$ ) ainsi que le profil du nombre de Mach  $M(x)$  (en précisant sur chaque schéma le repère  $M = 1$ ).



- b. Pour la configuration ci-dessous avec un écoulement d'air, évaluer (interpolation dans les tables non obligatoire):

- le nombre de Mach au col,
- le nombre de Mach en sortie (position 2),
- le rapport de pression entre la sortie et l'entrée  $p_2/p_1$ .



(1) a)

(i) Pour une sortie subsonique, le débit peut être évalué avec :

$$\dot{m} = \frac{P_0 A}{\sqrt{r T_0}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

en prenant :

$$P = P_{\text{sortie}} = P_{\text{atm}} = 101'325 \text{ Pa}$$

$$A = A_{\text{sortie}} = 10^{-5} \text{ m}^2$$

$T_0$  : température de réservoir (300 K)

$$\gamma = 1,4$$

$$r = 287 \text{ J/kg.K}$$

$P_0$  : pression de réservoir (variable)

(ii)  $P_0 = 1,5 \text{ patm}$

Application numérique :

$$\boxed{\dot{m} = 3,393 \times 10^{-3} \text{ kg/s}}$$

(iii) Pour des conditions uniques en sortie :

$$P_{\text{sortie}} = P^* = P_{\text{atm}}$$

$$\frac{P^*}{P_0} = 0,5283 \quad (\text{pour } \gamma = 1,4)$$

$$\dot{m}^* = \frac{P_0 A^*}{\sqrt{r T_0}} \cdot 0,6847 \quad \text{avec } A^* = A_{\text{sortie}}$$

Application numérique :

$$P_0 = 101'794 \text{ Pa}$$

$$(P_0 = 1,893 \cdot P_{\text{atm}})$$

$$\dot{m}^* = 4,476 \times 10^{-3} \text{ kg/s}$$

b) (i) Pour un écoulement subsonique dans une tuyère convergente, le nombre de Mach maximal est  $M = 1$  et ce nombre de Mach ne peut se produire qu'en sortie (col), quelles que soient les conditions de réservoir.

(ii) En amont du col, l'écoulement est subsonique : il est donc possible d'envoyer un "signal" du réservoir au reste de la tuyère. Une augmentation de la pression de réservoir peut donc augmenter le débit (contrairement à la pression arrière, dont toute diminution n'est plus perçue par la tuyère à cause du col devenu sonique et empêchant toute transmission de "signaux").

c) (i) Comme vu précédemment :

$$\dot{m}^* = p_0 \cdot 0,6847 \frac{A^*}{\sqrt{RT_0}} \quad \begin{array}{l} \text{linéaire en } p_0 \\ (\text{pour } T_0 \text{ const}) \end{array}$$

avec :  $A^* = A_{\text{sortie}}$

(ii) Pour  $p_0 = 2,5 \text{ Patm}$  :

$$\dot{m}^* = 5,911 \times 10^{-3} \text{ kg/s}$$

d) Comme vu précédemment :

$$p^* = 0,5283 \cdot p_0 \quad \text{avec } p^* = p_{\text{sortie}}$$

La pression de sortie augmente donc linéairement avec la pression de réservoir  $p_0$ .

Tant que la sortie est subsonique, la pression de sortie est égale à  $\text{Patm}$ .

Dès que des conditions soniques sont atteintes en sortie, la pression de sortie va augmenter avec la pression de réservoir (selon la relation ci-dessus) et être ainsi supérieure à la pression atmosphérique (pression arrière).

Il faut donc des ondes de détentes en sortie afin de permettre à l'écoulement de passer à  $p_{\text{sortie}} (> \text{Patm})$  à  $\text{Patm}$ .

(2)

a) (i) Pour  $S = 2^\circ$ , à partir des graphes pour onde de choc oblique (pour  $M_1 = 2,0$ ), on trouve l'angle de l'onde de choc :

$$\Theta \approx 31,6^\circ$$

(valeur exacte :  $31,646^\circ$ )

Avec :  $\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 \sin^2 \Theta - 1)$

$$\rightarrow P_2 - P_1 = P_1 \cdot \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 \sin^2 \Theta - 1)$$

Application numérique :

$$P_2 - P_1 = 11'953 \text{ Pa} \quad (\text{valeur très élevée pour les oreilles!})$$

(ii)  $\frac{\Pi}{M_1^2} \approx \frac{S}{\sqrt{M_1^2 - 1}}$  avec  $\Pi = \frac{P_2 - P_1}{\rho_1 a_1^2}$

Avec  $a_1^2 = \gamma r T_1 = \gamma \frac{P_1}{\rho_1}$

$$\rightarrow S \approx \frac{\sqrt{M_1^2 - 1}}{M_1^2} \frac{P_2 - P_1}{\gamma \cdot P_1}$$

OK pour les oreilles

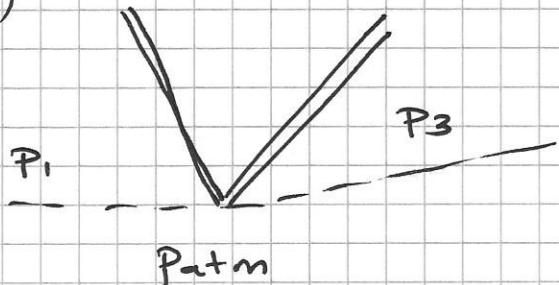


Application numérique pour  $P_2 - P_1 = 20 \text{ Pa}$  :

$$S \approx 6,1 \times 10^{-5} \text{ rad} \approx 3,5 \times 10^{-3} \text{ deg}$$

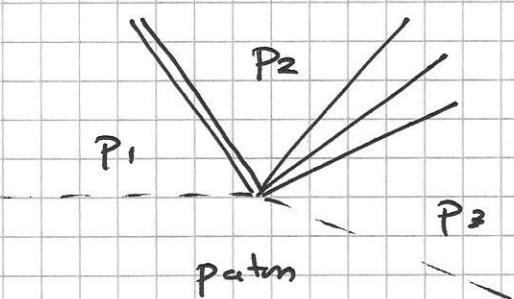
(angle non réalisable en pratique !)

b (i)



Ceci n'est pas possible car les deux ondes de choc vont augmenter la pression et on se retrouvera avec  $P_3 > P_{atm}$

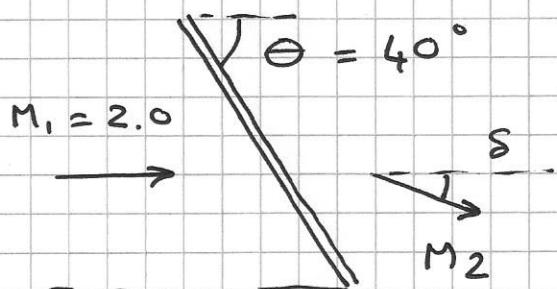
$$P_3 > P_{atm}$$



Ce scénario est possible : le choc va augmenter la pression  $P_2 > P_1$ , et il suffit donc d'avoir une détente qui puisse diminuer la pression de  $P_2$  à  $P_3 = P_{atm}$ .

(ii)

la première partie de l'écoulement peut se résoudre en projetant l'écoulement le long de la normale à l'onde de choc et en utilisant ensuite les tables pour ondes de choc droite ou les formules.



$$M_{n,1} = M_1 \cdot \sin\theta = 1,2856$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 1,7615$$

$$\delta = 10,62^\circ$$

$$M_2 = 1,6173$$

Pour la détente (isentrape),  
on peut écrire que la  
pression totale est invariante :

$$P_{0,2} = P_{0,3}$$

Or :

$$\frac{P_{0,2}}{P_2} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\frac{P_{0,3}}{P_3} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\text{avec } P_3 = P_1 = P_{atm}$$

$$\Rightarrow \left( \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{P_{0,3}/P_3}{P_{0,2}/P_2} = \frac{P_2/P_3}{P_2/P_1} = \frac{P_2}{P_1}$$

$\swarrow \qquad \qquad \qquad \uparrow$   
 $P_3 = P_1 = P_{atm}$

Avec  $\frac{P_2}{P_1}$  et  $M_2$  connus, on peut trouver  $M_3$   
à partir de cette relation :

$$M_3 = 1,9882$$

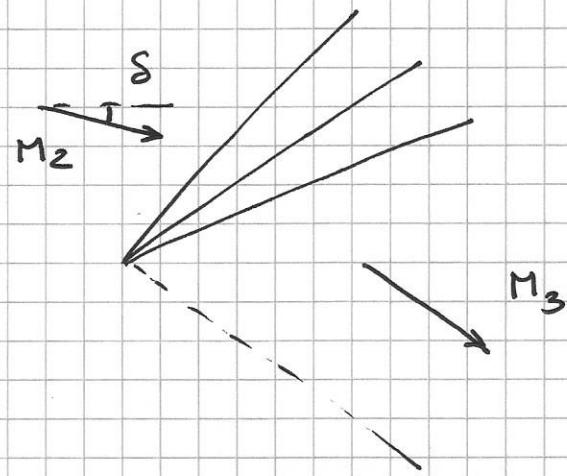
A partir de la fonction de Prandtl-Meyer  
(tables ou équation) :

$$\nu(M_2) = 15,372^\circ$$

$$\nu(M_3) = 26,054^\circ$$

Ainsi la déviation (vers le bas) de l'écoulement  
se fait avec un angle :

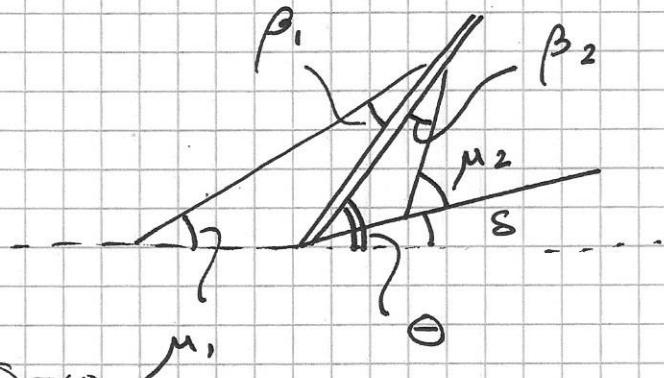
$$\delta + \nu(M_3) - \nu(M_2) = 21,302^\circ$$



c(i) Pour  $M_1 = 2,0$

$$\mu_1 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{M_1}\right)$$

$$\mu_1 = 30^\circ$$



On a vu dans l'exercice 2(a)(i):

$$\theta = 31,646^\circ$$

$$\text{On a : } \mu_1 + \beta_1 + (180^\circ - \theta) = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \theta - \mu_1 \rightarrow \boxed{\beta_1 = 1,646^\circ}$$

Pour  $\delta = 2^\circ$  (et  $\theta = 31,646^\circ$ ), on peut évaluer  $M_2$ :

$$M_2 = 1,928 \quad (\text{tables ou équations})$$

$$\rightarrow \mu_2 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{M_2}\right) \rightarrow \mu_2 = 31,242^\circ$$

$$\text{On a : } \theta - \delta + (180^\circ - \mu_2) + \beta_2 = 180^\circ$$

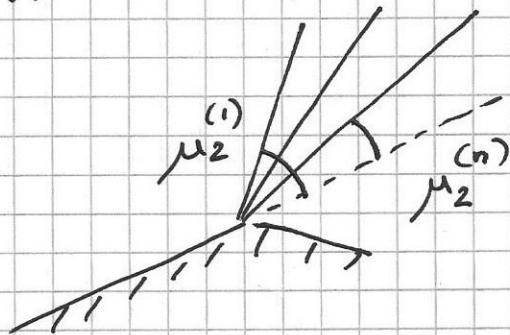
$$\Rightarrow \beta_2 = \mu_2 + \delta - \theta \rightarrow \boxed{\beta_2 = 1,596^\circ}$$

Ainsi  $\beta_1 \approx \beta_2$

(ii) les ondes de Mach en amont du choc restent inaltérées (ne dépendent que de  $M_1$ ), ainsi :

$$\mu_1 = \text{const} = 30^\circ$$

Or les ondes de Mach de l'éventail de PM ont un angle par rapport à la face du dièdre qui diminue



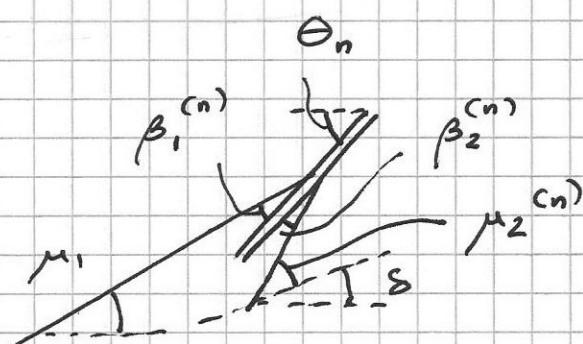
$$\mu_2^{(1)} > \mu_2^{(2)} > \dots > \mu_2^{(n)}$$

où  $\mu_2^{(n)}$  est l'angle de la  $n^{\text{ième}}$  onde de Mach.

On impose

$$\beta_1^{(n)} = \beta_2^{(n)}$$

où l'exposant ( $n$ ) indique l'interaction avec la  $n^{\text{ième}}$  onde de Mach de l'éventail



$$\text{On a : } \beta_1^{(n)} = \theta_n - \mu_1$$

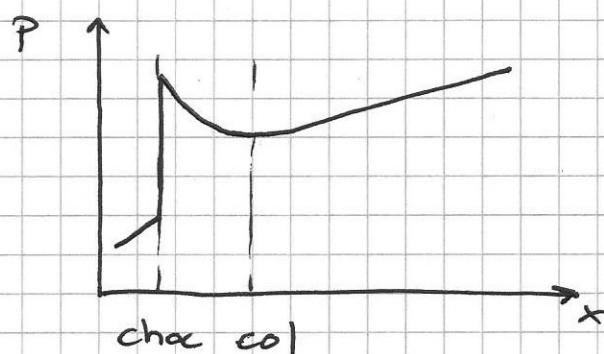
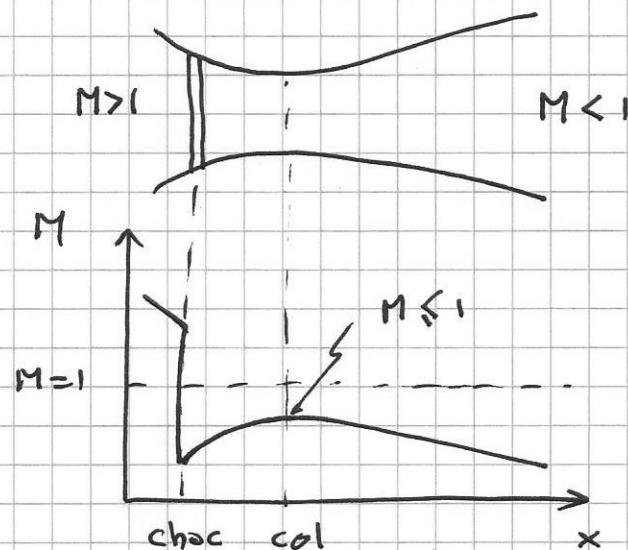
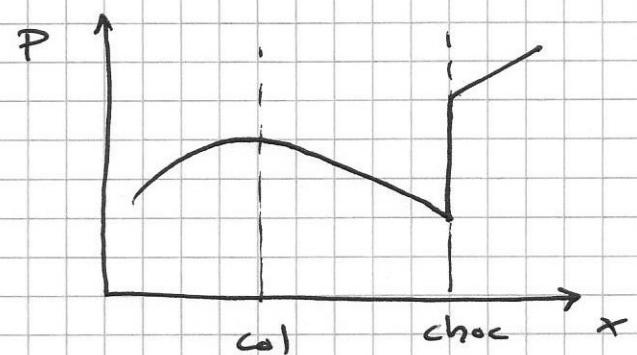
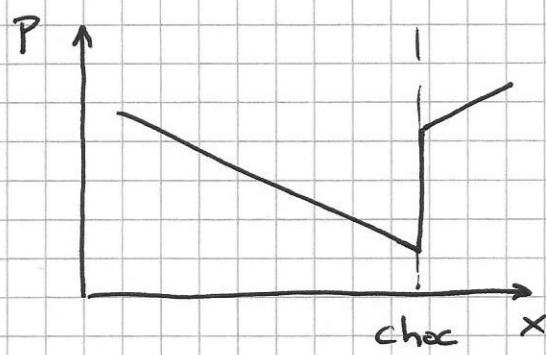
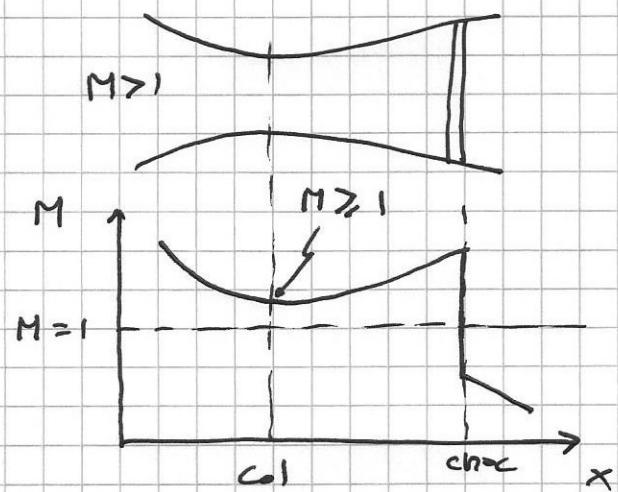
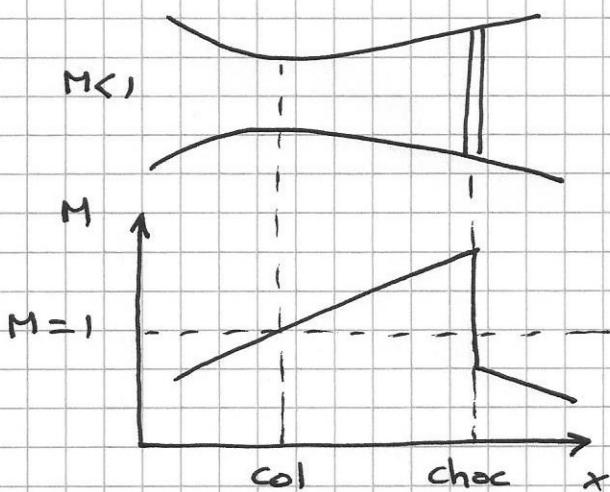
$$\beta_2^{(n)} = \mu_2^{(n)} + \delta - \theta_n$$

$$\beta_1^{(n)} = \beta_2^{(n)} \Rightarrow \theta_n - \mu_1 = \mu_2^{(n)} + \delta - \theta_n$$

$$\theta_n = \frac{1}{2} (\mu_1 + \delta + \mu_2^{(n)})$$

Comme  $\mu_1$  et  $\delta$  sont invariants, si  $\mu_2^{(n)}$  diminue alors  $\theta_n$  diminue, ce qui veut dire que l'intensité de l'onde de choc oblique diminue (pour  $M_1 = \text{const}$ ) et à l'infini tendra vers une onde de Mach.

3 a) Dans ces graphes la courbure des profils est arbitraire et dépend de la géométrie des tuyères.



b

i) Une erreur commune est de dire que le nombre de Mach au col est égal à 1.

En fait, l'écoulement reste supersonique comme on va le voir.

Pour  $M_1 = 2,0$ ,  $\frac{A_1}{A_{1*}} = 1,6875$

Or :  $\frac{A_1}{A_{\text{col}}} = \frac{20}{15} = 1,33$

donc le col n'est pas sonique.

Pour trouver  $M_{\text{col}}$  :

$$\frac{A_{\text{col}}}{A_{1*}} = \frac{A_{\text{col}}}{A_1} \cdot \frac{A_1}{A_{1*}} = \frac{15}{20} \cdot 1,6875 = 1,2656$$

A partir des tables ou équations :

$$M_{\text{col}} = 1,6188$$

ii) On évalue :  $\frac{A_{\text{choc}}}{A_{1*}} = \frac{A_{\text{choc}}}{A_1} \frac{A_1}{A_{1*}} = 1,8565$

$$\Rightarrow M_1^{\text{choc}} = 2,1122$$

$$M_2^{\text{choc}} = 0,5594 \rightarrow \frac{A_{\text{choc}}}{A_{2*}} = 1,2412$$

$$\frac{P_2^{\text{choc}}}{P_1^{\text{choc}}} = 5,0383$$

$$\frac{P_{0,2}}{P_{0,1}} = 0,6685$$

Ainsi :

$$\frac{A_2}{A_2^*} = \frac{A_2}{A_{\text{choc}}} \cdot \frac{A_{\text{choc}}}{A_2^*} = \frac{25}{22} \cdot (1,2412) = 1,4105$$

$$\rightarrow \boxed{M_2 = 0,4661} \rightarrow \frac{P_{0,2}}{P_2} = 1,1605$$

iii)

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_{0,2}} \cdot \frac{P_{0,2}}{P_{0,1}} \cdot \frac{P_{0,1}}{P_1}$$

$$= \frac{1}{1,1605} \cdot (0,6685) \cdot (7,8244)$$

$$\boxed{\frac{P_2}{P_1} = 4,5072}$$